Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

2º Examen Parcial (Tipo 2) (50 %)

MA-2112 Abril-Julio 2011

Soluciones.

Pregunta 1. Resolver

$$I = \int_{-4}^{0} \int_{\sqrt{-x}-1}^{1} \cos\left[\frac{\pi}{16}(y+1)^3\right] \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

(12 puntos)

Solución:

$$y = \sqrt{-x} - 1 \implies y + 1\sqrt{-x} \implies (y+1)^2 = -x \implies x = -(y+1)^2$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \int_{-(y+1)^2}^{0} \cos\left[\frac{\pi}{16}(y+1)^3\right] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \cos\left[\frac{\pi}{16}(y+1)^3\right] (y+1)^2 \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\frac{16}{\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{16}(y+1)^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{16}{3\pi} \end{aligned}$$

□

Pregunta 2. Sea $\vec{\sigma} : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la trayectoria dada por $t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t)$. Calcular

$$\int_{\vec{\sigma}} \left(e^{x\cos[\ln(2+\sqrt{|x|})]} + 4xy - 3y + 3\right) \mathrm{d}x + (2x^2 - x + 3y^2)\, \mathrm{d}y$$

(13 puntos)

Solución: Notar que $\vec{\sigma}$ recorre la semicircunferencia izquierda en sentido horario.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (4x - 1) - (4x - 3) = 2$$

Sea $\mathbf{L}$ el segmento de recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Usando el Teorema de Green:

$$\int_{\vec{\sigma}} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{L}} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

La integral doble vale el doble del rea del semicrculo de radio 1:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

Por otra parte

$$-\mathbf{L}(t) = (0, t) \quad \text{y} \quad -\mathbf{L}'(t) = (0, 1)$$

con $-1 \le t \le 1$. Por lo tanto

$$-\int_{\mathbf{L}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} 3t^2\ dt = 2$$

Entonces

$$\int_{\vec{\sigma}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{L}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\vec{\sigma}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - 2 = -\pi$$

y por tanto

$$\int_{\vec{\sigma}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 2 - \pi$$

□

Pregunta 3. Calcular el volumen interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante y entre los planos $y = x$ y $x = 0$.

(12 puntos)

Solución:
Se hace el cambio a coordenadas esféricas. La región de integración después del cambio es:

$$0 \le \rho \le a, \quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

La integral para calcular el volumen:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \ \ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^3}{12}$$

□

Pregunta 4. Calcular $\iint_R 4(x+y)e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ donde R es el triángulo de vértices $(-1, 1)$, $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

(13 puntos)

Solución: Se hace el cambio de coordenadas $u = x + y$ y $v = x - y$. Resolviendo para x y y se obtiene:

$$x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

y por tanto el determinante del jacobiano es $-1/2$.

Como el cambio de coordenadas es una transformación lineal, el triángulo original queda mapeado al triángulo de vértices $O = (0,0)$, $A = (2,0)$ y $B = (0,-2)$. Por tanto la nueva integral es:

$$\begin{aligned}
-2\int_0^1 \int_0^{u-2} ue^v \,\mathrm{d}v\mathrm{d}u &= -2\int_0^1 u(e^{u-2}-1)\ \mathrm{d}u \\
&= 2\left[\frac{1}{2} - \int_0^1 ue^{u-2}\ \mathrm{d}u\right] \\
&= 1 - 2\left[ue^{u-2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \left[e^{u-2}\right]\ \mathrm{d}u \qquad \text{(int. por partes)} \\
&= 1 - \frac{2}{e^2}
\end{aligned}$$

□